Lineare Algebra II: Übungsstunde 5

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/

24.03.2025

1 Quiz 18: Lösungsvorschlag

1.1 Aufgabe 18.a

Ja, $\|\cdot\| := \|\cdot\|' + \|\cdot\|''$ ist eine Norm. Wir zeigen Homogenität:

$$\|\alpha v\| = \|\alpha v\|' + \|\alpha v\|'' = |\alpha| \cdot \|v\|' + |\alpha| \cdot \|v\|'' = |\alpha| \cdot (\|v\|' + \|v\|'') = |\alpha| \cdot \|v\|, \tag{1}$$

wobei wir die Definition von $\|\cdot\|$, die Homogenität der beiden vorhandenen Normen und wieder die Definition angewendet haben; Nicht-Degeneriertheit:

$$\|v\| = 0 = \|v\|' + \|v\|'' = 0 + 0 \implies v = 0_V, \tag{2}$$

wobei wir die Definition und die Nicht-Negativität ($\|v\|' = -\|v\|'' \geq 0$) und Nicht-Degeneriertheit der beiden vorhandenen Normen angewendet haben; Dreiecksungleichung:

$$\|v + w\| = \|v + w\|' + \|v + w\|'' \leq \|v\|' + \|w\|' + \|v\|'' + \|w\|'' = \|v\| + \|w\|, \tag{3}$$

wobei wir die Definition und die Dreiecksungleichung für die vorhandenen Normen angewendet haben. $\square$

1.2 Aufgabe 18.b

Nein, $\|\cdot\| := \min\{\|\cdot\|', \|\cdot\|''\}$ ist keine Norm. Homogenität und Nicht-Degeneriertheit funktionieren, aber für die Dreiecksungleichung lässt sich ein Gegenbeispiel finden: Wir nehmen $V = \mathbb{R}^2$ mit den Normen

$$\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|' := 2|x| + |y| \qquad \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|'' := |x| + 2|y| \tag{4}$$

(Übung: Überprüfe, dass diese Funktionen wirklich Normen darstellen.), und zeigen für die beiden Einheitsvektoren, dass

$$\|e_1 + e_2\| = \min\{2 + 1, 1 + 2\} = 3 \not\leq 2 = \min\{2, 1\} + \min\{1, 2\} = \|e_1\| + \|e_2\|. \quad \square \tag{5}$$

2 Feedback Serie 17

4. Vorsicht: Komplemente sind nicht eindeutig! Es gilt für $V = K^2, \sigma(A) = \{\lambda, \mu\}$ zwar, dass $V = \tilde{E}_\lambda \oplus \tilde{E}_\mu$, aber wenn dann beispielsweise $\tilde{E}_\lambda = \langle e_1 \rangle$, dann folgt daraus nicht automatisch, dass $\tilde{E}_\mu = \langle e_2 \rangle$ ist! Denn erstens wäre auch $\langle e_1 + e_2 \rangle$ ein Komplement zu $\tilde{E}_\lambda$, und zweitens muss der zu μ gehörige Eigenvektor nicht unbedingt e_1 oder $e_1 + e_2$ sein. Daher müssen alle verallgemeinerten Eigenräume immer komplett ausgerechnet werden.

6. Leider ist der Eigenvektor $S^2 v$ der gesuchten Jordankette $\{v, Sv, S^2 v\}$ mit $S := A - \lambda \mathbf{1}_4$ nicht immer einer der «kanonisch berechneten» Eigenvektoren (hier konkret, da der Eigenraum zweidimensional ist und damit jede Linearkombination ein weiterer Eigenvektor ist und nicht alle funktionieren). Um den gewünschten Eigenvektor trotzdem zu finden, betrachte $S^2 v \neq 0_V$ und $S^3 v = 0_V$, womit also $v \in \ker S^3$ und zusätzlich $v \notin \ker S^2$ gelten muss. (Wenn $\dim \ker S^3 > \dim \ker S^2$ gilt, dann wird «fast jedes» $v \in \ker S^3$ funktionieren (da man sehr viel Glück haben muss, um in einem niedriger-dimensionalen Unterraum zu landen), womit ich euch empfehlen würde, bei unterschiedlichen Dimensionen Zeit zu sparen und einfach ein $v \in \ker S^3$ auszuprobieren.)

3 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Normen, Innere Produkte.

3.1 Zusätzliches Material

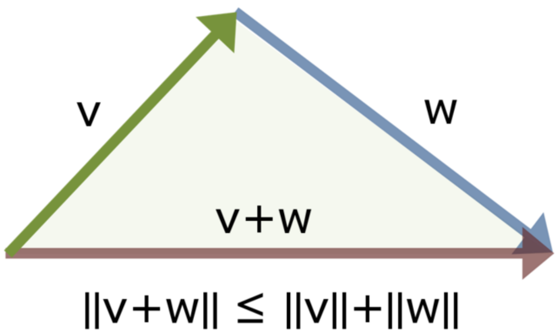

Abbildung 1: Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}^2$

Beispiel 1 (Beispiele wichtiger Normen)**.** *Die Standardnorm auf K^n:*

$$\|v\| := \left(\sum_{j=1}^{n} |v_j|^2 \right)^{1/2} \tag{6}$$

Diese kann mit der p-Norm verallgemeinert werden:

$$\|v\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |v_j|^p\right)^{1/p}, \tag{7}$$

wobei $1 \leq p < \infty$ *gilt.*

Für $p = 2$ *erhalten wir somit die Standardnorm.*

Für $p = 1$ *erhalten wir die Summennorm:*

$$\|v\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |v_j| \tag{8}$$

Für $p \to \infty$ *erhalten wir die Maximumsnorm:*

$$\|v\|_\infty = \max_{j=1}^{n} |v_j| \tag{9}$$

(Den Beweis für diesen Grenzwert findet man beispielsweise auf Wikipedia: `https://de.wikipedia.org/wiki/P-Norm#Maximumsnorm`.

Die Definition für das innere Produkt auf reellen Vektorräumen geht direkt aus der Definition für komplexe Vektorräume hervor, denn:

$$\overline{a} = a \qquad \forall (a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \iff a \in \mathbb{C} \wedge \operatorname{Im} a = 0) \tag{10}$$

Die Begriffe «Inneres Produkt» und «Skalarprodukt» werden häufig äquivalent für dasselbe verwendet.

Beispiel 2 (Beispiele wichtiger innerer Produkte)**.** *Das Standard-Innere Produkt auf* K^n*:*

$$\langle v, w\rangle := \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{w_j} \tag{11}$$

Ein häufig benutztes inneres Produkt auf $C^0([a,b])$ *(dem Raum der stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall* $[a,b]$*):*

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

Die Definition der Definitheit aus der ersten Übungsstunde impliziert (für symmetrische Matrizen) die Definition der Definitheit aus der Vorlesung. Um dies zu beweisen, braucht man aber den Spektralsatz, der zuerst noch einige Vorarbeit in der Vorlesung benötigt.

4 Aufgaben

Beispiel 3. *Zeige die Dreiecksungleichung für folgende Norm:*

$$\|\cdot\| := \sqrt{(|\cdot\|')^2 + (\|\cdot\|'')^2} \tag{13}$$

Tipp: Benutze die Dreiecksungleichung für die beiden gegebenen Normen $\|\cdot\|'$, $\|\cdot\|''$ und quadriere zweimal, um die Wurzeln zu entfernen.

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/LineareAlgebraII`

Weitere Aufgaben:

- FS02: 6 (Definitheit)
- HS05: 2a (symmetrisch)
- FS06: 7h (inneres Produkt)
- HS07: 5a (Skalarprodukt, Definitheit)

Tipps zur Serie 18 auf der nächsten Seite!

5 Tipps zur Serie 18

3. $N^3 = \mathbf{0}_{3\times 3}$
   b) Betrachte dieselbe Form wie in (a) für eine andere nilpotente Matrix und benutze $\lambda\lambda^{-1} = 1$.
   c) Schwierig: Betrachte die Jordannormalform und beweise die Aussage für die einzelnen Blöcke, benutze dazu (a) und (b).

5. Überlege die die Eigenschaften des Minimalpolynoms und wie es mit der Jordannormalform zusammenhängt.

6. a) Schreibe die Reihe in eine endliche Summe um, mit $n^0 = \mathrm{id}$.
   b) Schreibe die Reihe in eine endliche Summe um.
   c) Aufwändig: Benutze die Taylorreihen von $\exp x$ und $\log(1 + x)$ und rechne explizit durch.

7. Argumentiere mit den Eigenschaften einer Blockdiagonalform und beweise die Behauptung für die Jordanblöcke.

8. Schwierig: Schreibe das Gleichungssystem um in die Form $Au = 0_V$, mit $u = (x, s, -1)^\top$, und benutze die Eigenschaften der Vandermonde-Matrix aus vorherigen Serien.