Lineare Algebra II: Übungsstunde 4

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/

17.03.2025

1 Quiz 17: Lösungsvorschlag

1.1 Aufgabe 17.1

Definition. *V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $T : V \to V$ linear, $\lambda \in \sigma(T)$, dann ist der verallgemeinerte Eigenraum von λ definiert als:*

$$\tilde{E}_\lambda := \bigcup_{j=1}^{\infty} \ker(T - \lambda \mathbf{1}_V)^k \tag{1}$$

Ein dazu äquivalentes Lemma (Skript: Lemma 12.3.3):

Lemma 1.

$$\tilde{E}_\lambda = \ker(T - \lambda \mathbf{1}_V)^{\dim V} \tag{2}$$

1.2 Aufgabe 17.2

Wir können die Matrix als Blockdiagonalmatrix mit Jordanblöcken auf der Diagonalen schreiben:

$$A = \begin{pmatrix} J_2(2) & & & \\ & J_1(2) & & \\ & & J_2(3) & \\ & & & J_1(5) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(x) = (2-x)^3(3-x)^2(5-x), \tag{4}$$

womit wir direkt die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = 5 \tag{5}$$

mit ihren algebraischen Vielfachheiten (entsprechen den Vielfachheiten der Nullstellen in $\chi_A(x)$)

$$a_2 = 3 \qquad a_3 = 2 \qquad a_5 = 1 \tag{6}$$

ablesen können. Die geometrischen Vielfachheiten können wir aus der Matrix selbst als die Anzahl Blöcke pro Eigenwert ablesen:

$$g_2 = 2 \qquad g_3 = 1 \qquad g_5 = 1 \tag{7}$$

2 Feedback Serie 16

3. Vorsicht mit vorschnellen Implikationen: $\sigma(f) = \{1\} \wedge f^2 = \mathrm{id} \equiv \mathbf{1}_V \;\not\Longrightarrow\; f = \mathrm{id}$. Ein Gegenbeispiel:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
4. Die Aufgabenstellung war $\exists v \in V, v \neq 0_V : p(T)v = 0_V$ (oder äquivalent dazu: $v \in \ker p(T)$) und nicht $\forall v \in V, v \neq 0_V : p(T)v = 0_V$. (Die Formulierung war etwas unklar, dies wurde so weitergeleitet.)
5. Ein kleines, aber wichtiges Detail: Wieso gibt es neben den gefundenen Eigenfunktionen $ce^{\lambda x}$ keine weiteren?

3 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Verallgemeinerte Eigenräume, Jordanketten, Jordansche Normalform (Beweis).

3.1 Zusätzliches Material

Ein «Rezept» um die Jordansche Normalform einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ (und die dazugehörende Jordanbasis) zu bestimmen:

1. Charakteristisches Polynom $\chi_A(x)$ berechnen; Wir erhalten die algebraischen Vielfachheiten a_λ aus den Vielfachheiten der Nullstellen, die uns die Summe der Länge aller Jordanblöcke pro Eigenwert (die Anzahl Einträge mit dem Eigenwert auf der Diagonalen) geben.
   a) Bereits hier hilft $g_\lambda \leq a_\lambda$ eventuell weiter.
2. Bestimmung der Eigenräume (mithilfe Bestimmen von $\ker(A - \lambda \mathbf{1}_n)$ oder Lösen des Gleichungssytems $Av = \lambda v$), womit wir die geometrischen Vielfachheiten g_λ aus den Dimensionen der Eigenräume erhalten, die uns die Anzahl Jordanblöcke pro Eigenwert geben.
   a) Wenn die Differenzen und Werte der Vielfachheiten nicht zu gross sind, kann man hier häufig bereits die gesamte Jordansche Normalform hinschreiben.
3. Bestimmung der Jordanketten, um die Längen der einzelnen Blöcke aus den Längen der Jordanketten und die fehlenden Vektoren für die Jordanbasis zu finden:

a) Einen Eigenvektor $Av = \lambda v$ auswählen.

b) $S := A - \lambda \mathbf{1}_n$ benutzen, um mit $Sw = v$ den Vektor w zu finden. Dies solange mit $w \mapsto v$ wiederholen, bis $w = 0_V$ die Lösung ist. Die erhaltenen Vektoren (ohne 0_V) $\{w, Sw, S^2w, \ldots, S^{k-1}w\}$ bilden die gewünschte Jordankette, wobei die Länge dieser der Länge des Jordanblocks entspricht.

4. Jordansche Normalform hinschreiben

   a) Konvention: Eigenwerte der Grösse nach aufsteigend und Blöcke desselben Eigenwertes der Grösse nach absteigend sortieren.

   b) Das minimale Polynom kann einfach abgelesen werden:

$$m_A(x) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (\lambda - x)^{b_\lambda},$$

   wobei b_λ die Länge des grössten Jordanblocks zum Eigenwert λ ist.

5. Jordanbasis (bzw. Basiswechselmatrix) hinschreiben: alle Jordanketten geordnet nach ihren zugehörigen Blöcken in der Jordanschen Normalform. *Wichtig*: Die Jordanketten selbst müssen umgekehrt sortiert sein als in der Definition; also zuerst der Eigenvektor des Blocks, dann die niedrigeren Potenzen von S! (Andernfalls sind die 1-Einträge des Blocks unter der Diagonale statt wie gewünscht darüber.)

4 Aufgaben

Beispiel 1. *Berechne die Jordansche Normalform und die zugehörige Jordanbasis der Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Lösung. Wir bestimmen das charakteristische Polynom:

$$\chi_A(x) = (1 - x)^4 \tag{9}$$

und erhalten daraus den einzigen Eigenwert $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit $a_\lambda = 4$. Entweder mit konkreter Berechnung oder Betrachtung der Matrix sehen wir, dass ein einziger Eigenvektor $v = e_1$ existiert. Damit haben wir bereits die Jordansche Normalform bestimmt:

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Um die Jordanbasis zu erhalten, finden wir die Jordankette zum Eigenvektor $v = S^3 w$, wobei

$$S^3 = (A - \mathbf{1})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

womit direkt ersichtlich ist, dass $w = e_4$. Damit können wir die Jordankette in umgekehrter Reihenfolge mithilfe von

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

hinschreiben (und somit auch die Basiswechselmatrix):

$$\{S^3 w, S^2 w, Sw, w\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \implies P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Zur Überprüfung berechnen wir: $P^{-1}AP = J_A \quad \checkmark$. □

Vorsicht: WolframAlpha braucht die andere Konvention der Basiswechselmatrizen: $QAQ^{-1} = J_A$, weshalb unsere berechnete Basiswechselmatrix nicht der von WolframAlpha entspricht; es gilt: $Q^{-1} = P^G$ (die «Gegentransponierte» von P, also die Spiegelung an der Diagonalen von links unten nach rechts oben) mit $p_{ij} = q^{-1}_{n-j+1,n-i+1}$. Das behandelte Beispiel ist hier auf WolframAlpha zu finden.

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/LineareAlgebraIII`

Weitere Aufgaben:

- HS04: 4
- HS07: 3

Tipps zur Serie 17 auf der nächsten Seite!

5 Tipps zur Serie 17

1. Welche Bedeutungen hat der Rang? Betrachte eine Einschränkung $L_A|_{\operatorname{im} L_A}$ und multipliziere das Polynom mit x, um Grad $r+1$ zu erhalten.

2. Beweise mithilfe von Induktion, dass $W := \langle \mathbf{1}_n, A, A^2, \dots \rangle = \langle \mathbf{1}_n, A, A^2, \dots, A^{n-1} \rangle$. Benutze Cayley-Hamilton, um zu zeigen, dass $A^k \in W, \forall k \in \mathbb{N}$.

5. Schreibe die Darstellungsmatrizen in einer geeigneten Basis hin.

7. Unterscheide nilpotent (Aussage stimmt, beweise sie mithilfe der Anzahl Jordanblöcke) und nicht-nilpotent (Aussage stimmt nicht, finde ein Gegenbeispiel).